Outils de prévision de la demande et stocks : substituts ou compléments ?

Nicolas Houy* Thomas Houy†

29 janvier 2007

Résumé

Nous montrons à l'aide d'un modèle heuristique que les stocks et les outils de prévision de la demande peuvent être des biens complémentaires ou substituables pour la firme en fonction de la nature de la demande.

Mots-Clés : Outils de Prévision de la Demande, Stocks, Substituabilité, Complémentarité.

Classification JEL : D21, L21

*THEMA, Université de Cergy-Pontoise, E-mail : nhouy@free.fr.

†ENST Paris, E-mail : houy@enst.fr.

1 Introduction

Une firme multiproduit confrontée à une demande dont elle connait le volume total mais dont elle ne connait pas la ventilation pour chacun de ses produits fait face à des risques élevés de non satisfaction de la demande. Pour limiter ces risques, la firme peut décider de se protéger en constituant des stocks et/ou d'anticiper en prévoyant la demande.

Si la firme décide de se protéger en constituant des stocks, ces stocks sont alors une production intentionnelle. Leur niveau est optimisé par le producteur qui souhaite minimiser les risques de rupture[1] tout en limitant les coûts liés au stockage, voir [Kahn, 1992, Krane, 1994, Ramey, 1991, West, 1986]. Notons que la littérature économique montre que d'autres motifs permettent d'expliquer la présence de stocks en entreprise, voir [Peeters, 1998] et plus spécifiquement [Chavas *et al.*, 2000] pour le motif de transaction, [Steele, 1952] pour le motif de spéculation et [Christiano, 1988] pour une conception des stocks comme un résidu de la production.

Si la firme décide d'anticiper en prévoyant la demande, la firme peut alors acheter ce qu'on appellera génériquement un Outil de Prévision de la Demande (OPD). Elle peut par exemple choisir d'acquérir un ERP (Enterprise Resource Planning) et notamment sa composante CRM (Customer RelationShip Management). Celui-ci permet de deux façons une connaissance plus fine de la demande future. D'une part, parce qu'il constitue une aide pour faire des statistiques sur les caractéristiques de la demande et d'autre part parce qu'il permet à l'entreprise de coopérer avec ses clients pour ce qui concerne leurs prévisions d'achat.

Une question se pose alors : les OPDs et les stocks sont-ils des biens complémentaires ou substituables pour la firme ? Autrement dit, les comportements de protection et de prévision sont-ils complémentaires ou substi-

[1]Les risques de rupture sont les risques associés à la non détention et donc à la non livraison d'un bien demandé par un consommateur.

tuables ? Intuitivement, nous pourrions penser qu'une firme ayant la possibilité de prevoir sa demande, n'a pas besoin de se protéger contre les risques de rupture imputables à la variabilité des caractéristiques de la demande puisque celle-ci devient prévisible. De manière symétrique, il semble intuitif de penser qu'une firme protégée par des stocks n'a pas besoin de prévoir la demande. Les OPDs et les stocks seraient alors substituables. Cependant, comme nous allons le montrer, la nature potentiellement imparfaite des prévisions et la présence d'une corrélation dans le temps de la demande peuvent nuancer cette première intuition sur le caractère substituable des OPDs et des stocks. Dans certains cas, on pourra même montrer que les stocks et les OPDs peuvent être des biens complémentaires.

Depuis l'article séminal de [Harris, 1913], de nombreuses études ont pour but de déterminer le niveau optimal des stocks d'une entreprise, voir [Dannerstedt, 1955, Holt *et al.*, 1955, Hansmann et Hess, 1960, Goodman, 1974, Taubert, 1968, Bowman, 1956, Bowman, 1963, Jones, 1967]. Ces modèles prennent en compte de nombreuses variables et sont donc résolus grâce à des méthodes de simulation. Certains font des hypothèses *ad hoc* sur la relation entre la constitution de stocks et la prévision de la demande. Au contraire, notre but sera d'écrire un modèle heuristique montrant la complexité des relations entre les comportements de protection et de prévision d'une firme faisant face à une demande incertaine. A notre connaissance, nous montrons le premier modèle où le choix entre l'acquisition d'un OPD et la constitution de stocks est endogène.

Notre article est organisé en deux parties. Dans la première partie, nous posons un modèle représentant une entreprise faisant face à un double choix : installer ou non un OPD et/ou constituer ou non des stocks. Dans la seconde partie, nous présentons nos résultats. Nous montrons entre autre que les stocks et les OPDs peuvent être des biens substituables ou complémentaires.

2 Le modèle

On considère une entreprise produisant un bien sans coût avec une caractéristique q qui peut prendre deux valeurs, A ou B.

En période 0a, l'entreprise décide si elle veut installer un OPD et/ou une taille de stocks étendue. L'entreprise produit pour remplir ses stocks. Si elle choisit une taille de stocks réduite, l'entreprise pourra produire 3 unités du bien, chacune pouvant être de type A ou B. Si elle choisit une taille de stocks étendue, l'entreprise pourra produire 4 unités du bien, chacune pouvant être de type A ou B.

En période 0b, l'entreprise acquiert la connaissance de la première future demande[2] et décide de sa production. On notera $(i, j)^o$ la production de l'entreprise avec i le nombre d'unités du bien de type A et j le nombre d'unités du bien de type B.

De la période 1 à la période 3, l'entreprise fait face à une demande $d_t \in \{A, B\}, \forall t \in \{1, 2, 3\}$ à chaque période. Si en période 0a, l'entreprise a décidé de ne pas installer d'OPD, seule la demande de la période 1, d_1 est anticipée en période 0b. Si en période 0a, l'entreprise a décidé d'installer un OPD, les demandes des deux premières périodes 1 et 2, d_1 et d_2, sont connues en période 0b.[3] La demande a une structure montrant une corrélation α. Ainsi, si en période $t \in \{1, 2\}$, la demande est $d_t \in \{A, B\}$, alors la demande en période $t+1$, d_{t+1}, est égale à d_t avec une probabilité α, différente de d_t avec une probabilité $1 - \alpha$. En considérant tous les cas,

- la probabilité que la demande en période 2 (resp. 3) soit A si la demande en période 1 (resp. 2) a été A est α,
- la probabilité que la demande en période 2 (resp. 3) soit B si la demande

[2]Notons qu'on pourrait sans changement considérer que la première demande est observée en période 0a ou même avant.

[3]Le fait que l'entreprise observe toujours la première demande est posée pour simplifier les résultats et ne pas poser cette hypothèse ne modifierait pas substantiellement nos résultats. On considère que la firme connaît les caratéristiques pertinentes du marché quand elle se lance dans la production.

en période 1 (resp. 2) a été B est α,

- la probabilité que la demande en période 2 (resp. 3) soit B si la demande en période 1 (resp. 2) a été A est $1-\alpha$,
- la probabilité que la demande en période 2 (resp. 3) soit A si la demande en période 1 (resp. 2) a été B est $1-\alpha$.

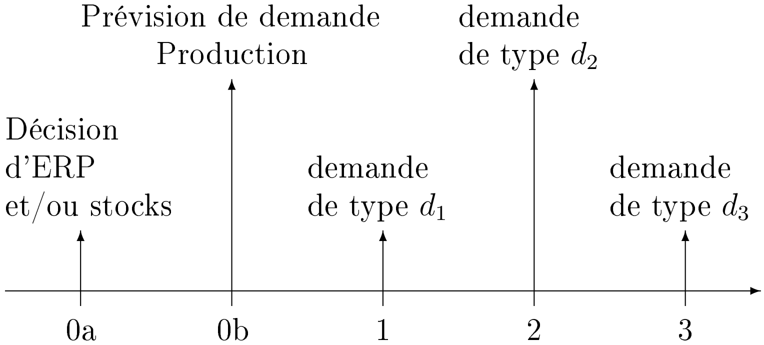
Ainsi, quand $\alpha = 1/2$, les caractéristiques de la demande sont totalement aléatoires, ce sont des évènements indépendants. Si $\alpha > 1/2$, la demande présente une certaine inertie. Si $\alpha < 1/2$, la demande a une volatilité plus élevée que le processus non corrélé.

On notera $(i,j)^d$ la demande totale avec i le nombre d'unités du bien de type A demandées pendant les trois périodes et j le nombre d'unités du bien de type B demandées pendant les trois périodes.

A chaque période, l'entreprise satisfait la demande si elle possède dans ses stocks une unité du bien de même caractéristique que celle demandée. Sans perte de généralité, on fixe le prix du bien à 1. Formellement, si la production de l'entreprise est donnée par $(a^o, b^o)^o$ et la demande est donnée par $(a^d, b^d)^d$, alors la recette *ex post* de l'entreprise est donnée par

$$\min\{a^o, a^d\} + \min\{b^o, b^d\}.$$

On montre les actions en fonction du temps sur la ligne suivante.



Pour résumer, en période 0a, l'objectif de l'entreprise est de décider de l'installation ou non d'un OPD et/ou de stocks étendus en maximisant son espérance de profit. En période 0b, l'objectif de l'entreprise est de décider des caractéristiques de sa production (3 unités si l'entreprise a décidé de ne pas installer de stocks étendus en période 0a et 4 unités si l'entreprise a décidé d'installer des stocks étendus en période 0a) en maximisant son espérance de profit quand elle observe la caractéristique de la demande de la première période (dans tous les cas) et la caractéristique de la demande de la seconde période si l'entreprise a décidé d'installer un OPD en période 0a. Le coût d'un OPD est $K > 0$, le coût pour étendre la taille des stocks est $c > 0$. Notons ici que la demande est étalée sur trois périodes par simplification mais on pourrait parfaitement considérer que celle-ci s'exprime en une seule période. En effet, dans notre modèle, nous considérons que l'entreprise produit 3 ou 4 unités de bien pour satisfaire une demande d'une unité par période sur 3 périodes. L'entreprise adopte donc un mode de production poussé et la corrélation dans la demande est une corrélation dans le temps sur la nature des biens demandés. Nous pouvons toutefois réinterpréter l'ensemble de notre modèle en considérant que l'entreprise produit 3 ou 4 unités de bien pour satisfaire une demande de 3 unités qui s'exprimerait en une seule période. Dans ce cas, la corrélation de la demande ne serait plus une corrélation dans le temps entre les biens demandés mais une corrélation sur la nature des 3 unités de bien demandées à la même période.

3 Résultats

Les décisions optimales d'installation d'un OPD ou de stocks étendus sont montrées en figures 1 à 4 pour plusieurs valeurs de c, K et α[4]. La figure 1 montre ces décisions pour $K = 0.06$, c variant entre 0 et 0.8 et α entre 0 et 1. Une zone dénommée ij avec $i, j \in \{0, 1\}$ est une zone où l'entreprise installe

[4]Le gain de l'entreprise dans tous les cas est donné en appendice.

un OPD si et seulement si $i = 1$ et des stocks étendus si et seulement si $j = 1$. Par exemple pour $K = 0.06$, $c = 0.2$ et $\alpha = 0.4$, on est dans une zone 11 où l'entreprise installe donc un OPD et des stocks étendus. En revanche, pour $K = 0.06$, $c = 0.6$ et $\alpha = 0.4$, on est dans une zone 00 où l'entreprise n'installe ni OPD ni stocks étendus.

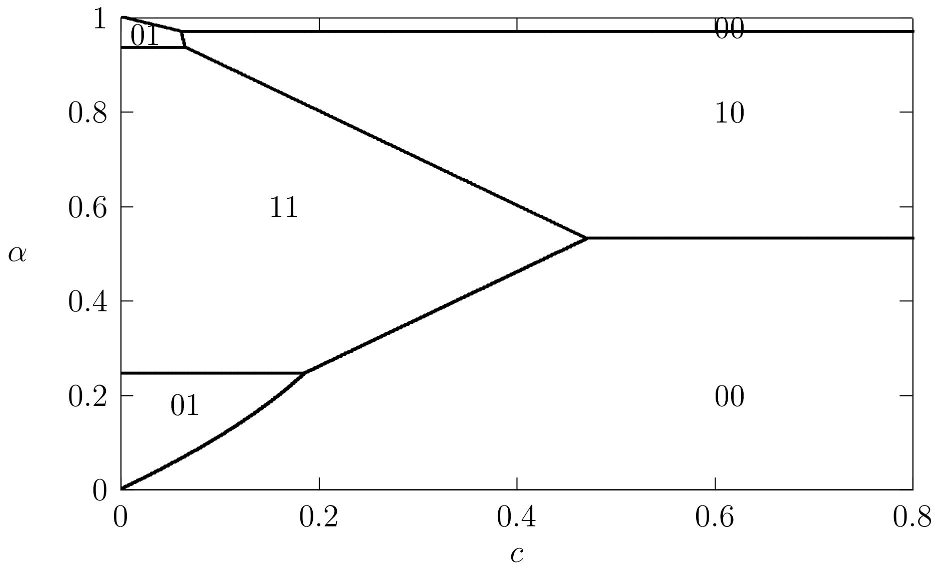


FIG. 1 – Décisions d'installation d'un OPD et de stocks étendus pour $K = 0.06$ et en fonction de c et α.

La figure 2 est identique à la figure 1 à cela près que le paramètre K y est plus élevé, $K = 0.5$. En fait, le prix K de l'OPD est tellement élevé que l'entreprise n'en acquiert jamais.

Les figures 3 et 4 sont identiques aux figures 1 et 2 sinon qu'on y fait varier K et que c est fixé ($c = 0.15$ dans la figure 3 et $c = 0.5$ dans la figure 4).

Nous allons dans un premier temps étudier ces figures. Nous voyons bien évidemment que quand le coût d'installation d'un OPD devient très important (figure 2), il n'existe pas de cas où l'on en installe un. De même, quand le coût de constitution de stocks étendus devient très important (figure 4), il n'existe pas de cas où l'on en constitue.

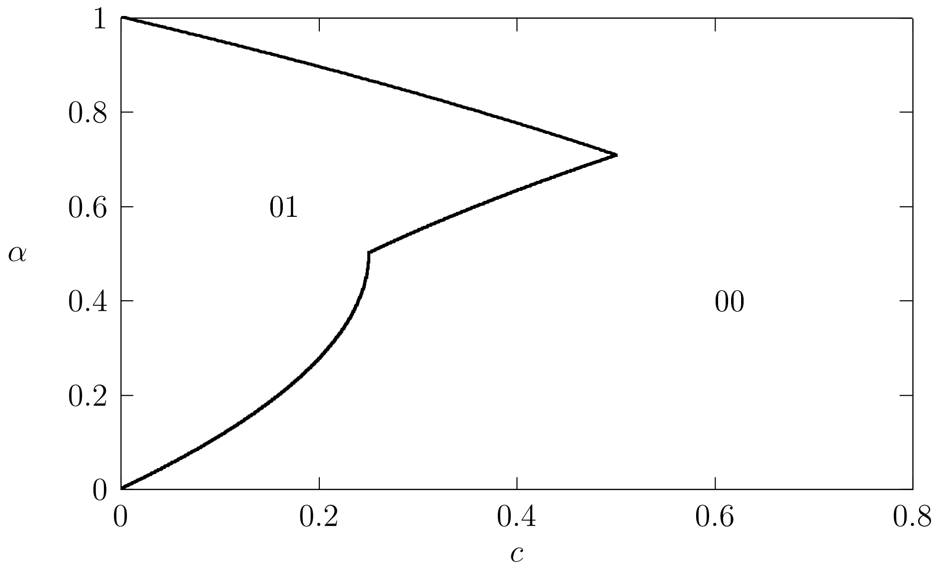


FIG. 2 – Décisions d'installation d'un OPD et de stocks étendus pour $K = 0.5$ et en fonction de c et α.

Bien évidemment, dans chacune des figures, la question de l'installation d'un OPD et/ou de stocks étendus ne se pose pas quand on s'approche trop de 0 ou 1. En effet, dans ces cas, les caratéristiques de la demande deviennent presque certaines et on rend très faible la probabilité de se tromper quand on anticipe la demande. L'incitation à installer un OPD ou des stocks est donc nulle et, si leur prix est non nul, alors il ne peut pas être optimal d'en installer pour se prémunir contre l'incertitude liée à la demande.

On peut également voir, ce qui peut paraître contre-intuitif, que les figures ne sont pas symétriques par rapport à $\alpha = 1/2$. Pour illustrer la raison qui explique ce fait, étudions la figure 1 ($K = 0.06$) avec un c tendant vers l'infini. Comme le coût d'installation de stocks étendus tend vers l'infini, l'entreprise n'en installera jamais. Se pose alors pour elle seulement la question de l'installation d'un OPD. Si α est proche de 1, alors sans OPD, l'entreprise prévoit que très certainement, les trois unités de bien qui lui seront demandées seront de même caractéristique, posons A. Elle produira alors trois unités de bien de caratéristique A. Mais avec une faible probabilité, la

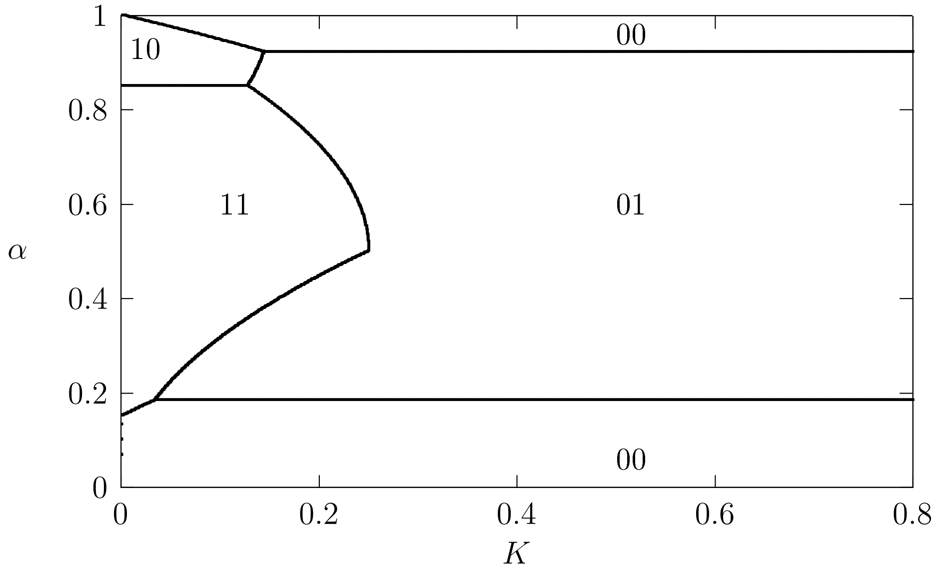


FIG. 3 – Décisions d'installation d'un OPD et de stocks étendus pour $c = 0.15$ et en fonction de K et α.

caractéristique de la deuxième unité de bien demandée sera B et alors la suivante sera très certainement B également. Dans ce cas d'erreur de prédiction, l'entreprise ne peux pas répondre à deux demandes. Si α est très petit, alors sans OPD, l'entreprise prévoit que très certainement, les trois unités de bien qui lui seront demandées seront de caractéristiques alternées. Posons A la caractéristique de la première unité demandée. L'entreprise s'attend alors à ce qu'on lui demande, pour les périodes suivantes, une unité de type A et une de type B. Elle produira alors deux unités de bien de caratéristique A et une de caratéristique B. Mais avec une faible probabilité, en considérant la même erreur que précédemment, la caractéristique de la deuxième unité de bien demandée sera A et alors la suivante sera très certainement B. Dans ce cas, l'entreprise peux toujours répondre aux trois demandes. Ainsi, quand α est très petit, l'entreprise ne gagne rien à l'installation d'un OPD car même une erreur de sa part n'entraîne pas de défaut de satisfaction de la demande. En revanche, comme nous l'avons vu, pour de grandes valeurs de α, une erreur de prédiction de la seconde demande, même si la probabilité

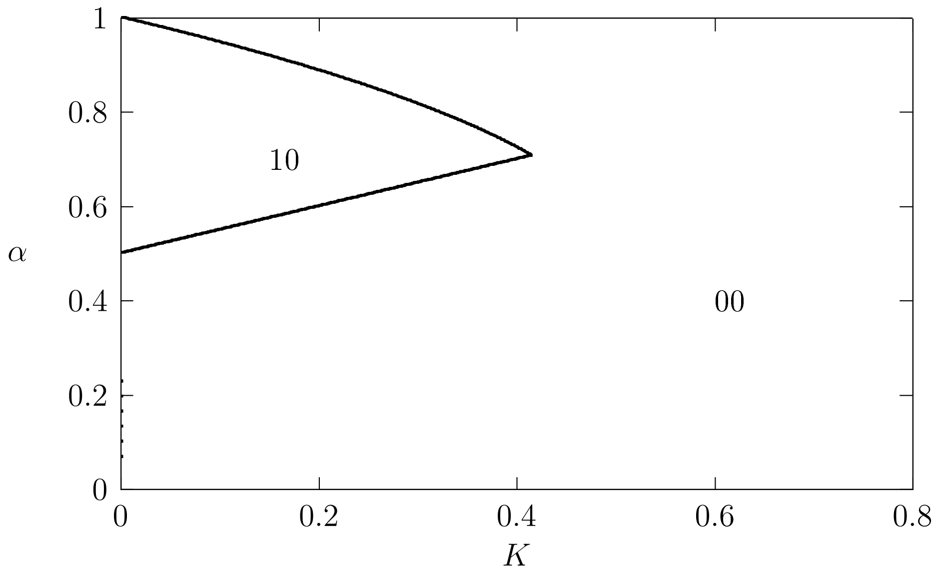


FIG. 4 – Décisions d'installation d'un OPD et de stocks étendus pour $c = 0.5$ et en fonction de K et α.

en est faible, peut avoir des conséquences importantes et l'entreprise a alors intérêt à installer un OPD pour éviter cette erreur de prédiction. Le même raisonnement est valable pour justifier que l'installation de stocks étendus n'est pas symétrique par rapport à $\alpha = 1/2$ dans la figure 3.

Revenons maintenant à la principale motivation de notre étude. Elle traite du caratère substituable et/ou complémentaire de l'installation de stocks étendus et d'OPD. Comme il est usuel, nous dirons que l'installation d'un OPD est substitut à l'installation de stocks étendus quand l'augmentation du prix de l'installation de stocks étendus (augmentation de c) entraîne une installation (demande croissante) d'OPD ou quand l'augmentation du prix de l'installation d'un OPD (augmentation de K) entraîne une installation (demande croissante) de stocks étendus. Au contraire, nous dirons que l'installation d'un OPD est complémentaire à l'installation de stocks étendus quand l'augmentation du prix de l'installation de stocks étendus (augmentation de c) entraîne une désinstallation (demande décroissante) d'OPD ou quand l'augmentation du prix de l'installation d'un OPD (augmentation de

K) entraîne une désinstallation (demande décroissante) de stocks étendus.

Nous allons montrer que selon les valeurs de K et de α, l'installation d'un OPD peut être complémentaire ou substituable à l'installation de stocks étendus.

Dans la figure 1 et donc avec $K = 0.06$, pour $\alpha = 0.96$, quand on augmente c, on passe d'une zone 01 à une zone 10. On a donc une installation de l'OPD quand le prix des stocks étendus augmente. Pour ces valeurs, les stocks étendus et l'OPD sont donc substituables. Nous pouvons également voir cette substituabilité dans la figure 3 ($c = 0.15$) pour $\alpha = 0.88$. Quand on augmente K, on y passe d'une zone 10 à une zone 01. On a donc une installation des stocks étendus quand le prix de l'OPD augmente. Pour ces valeurs aussi, les stocks étendus et l'OPD sont substituables.

La raison pour laquelle les stocks étendus et l'OPD sont substituables dans certains cas est assez intuitif. Les stocks étendus et l'OPD ont le même but pour l'entreprise, c'est-à-dire de permettre à l'entreprise de satisfaire la demande plus souvent possible. On peut alors facilement imaginer que si l'efficacité d'un des deux instruments est suffisamment forte alors, celui-ci suffit pour l'entreprise. Ainsi, si la hausse de son prix le rend trop cher, alors le second instrument est utilisé pour le remplacer. Par exemple, pour certaines valeur de α importantes, les stocks et l'OPD séparément permettent à l'entreprise de satisfaire la demande pour les trois périodes presque certainement, et donc il y a peu d'incitations à consommer les deux. Alors, si c est faible, l'entreprise installera des stocks mais pas d'OPD. Si on augmente c suffisamment par rapport à K fixé, alors l'entreprise aura intérêt à plutôt installer un OPD, relativement moins cher et alors de ne pas installer de stocks dont l'utilité marginale est très faible en présence d'OPD.

Maintenant, considérerons $K = 0.06$. Nous pouvons voir alors dans la figure 1, que pour $\alpha = 0.4$, quand on augmente c, on passe d'une zone 11 à une zone 00. On a donc une désinstallation de l'OPD quand le prix des stocks étendus augmente. Pour ces valeurs, les stocks étendus et l'OPD sont donc complémentaires. Nous pouvons également voir cette complémentarité dans la figure 3 ($c = 0.15$) pour $\alpha = 0.18$. Quand on augmente K, on passe d'une zone 11 à une zone 00. On a donc une désinstallation des stocks étendus quand le prix de l'OPD augmente. Pour ces valeurs aussi, les stocks étendus et l'OPD sont complémentaires.

La complémentarité de l'OPD et des stocks pour certaines valeurs est certainement plus difficile à comprendre et moins intuitive. Pour l'expliquer montrons que l'effet de l'OPD peut être nul sans stocks mais positif avec stocks. Ainsi, on montrera qu'il y a complémentarité stratégique entre les consommations de stocks étendus et d'OPD et ainsi, complémentarité au sens donné plus haut. Pour cela, prenons $\alpha = 1/2$.

Si l'entreprise a un OPD et des stocks étendus, alors si les deux premières caractéristiques demandées sont $d_1 = d_2 = A$ (resp. $d_1 = d_2 = B$), en produisant trois biens de type A (resp. B) et un biens de type B (resp. A), elle satisfera toujours toute la demande. Si les deux premières caractéristiques demandées sont différentes, $d_1 \neq d_2$, en produisant deux biens de type A et deux biens de type B, l'entreprise satisfera toujours toute la demande. Ainsi, quel que soit le cas, l'entreprise satisfait toujours toute la demande si elle a des stocks et un OPD.

Si l'entreprise a des stocks étendus mais pas d'OPD, alors, le meilleur résultat est obtenu quand l'entreprise produit deux unités de bien de chaque caractéristique.[5] Mais dans ce cas, l'entreprise ne peut pas toujours satisfaire toute la demande. En effet, si la demande est telle que $d_1 = d_2 = d_3$, ce qui arrive avec probabilité $\alpha^2 = 1/4$, alors l'entreprise est prise une fois en défaut. Ainsi, en comparant ces deux cas particuliers, l'OPD a un effet positif quand il y a des stocks étendus.

[5] Voir l'appendice pour une preuve. On pourra y voir que la production de trois unités de caratéristique d_1 et d'une unité de caratéristique différente de d_1 donne la même performance à l'entreprise.

Considérons maintenant le cas où l'entreprise n'a pas de stocks et un OPD. L'entreprise observe alors d_1 et d_2 avant de décider de sa production. Sa stratégie est alors de produire deux unités de bien de caractéristique d_1 et d_2 et de produire une autre unité de type quelconque. L'entreprise est alors évidemment prise à défaut pour une unité avec une probabilité $1/2$.

Considérons le cas où l'entreprise n'a pas de stocks et pas d'OPD. L'entreprise observe alors seulement d_1 avant de décider de sa production. Sa stratégie est alors de produire deux unités de bien de caractéristique d_1 et une unité de type différent de d_1. L'entreprise est alors en mesure de satisfaire toute la demande si $d_2 \neq d_3$ ce qui arrive avec une probabilité $1/2$. Elle est prise en défaut d'une unité si $d_2 = d_3$, ce qui arrive avec une probabilité $1/2$. Ainsi, en comparant les deux derniers cas, on voit que l'installation d'un OPD est sans conséquence si il n'y a pas de stocks étendus.

Ainsi, l'incitation à installer un OPD peut être plus importante quand il y a des stocks étendus que quand il n'y en a pas. On peut ainsi expliquer une complémentarité stratégique entre les consommations de stocks et d'OPD. Il existe donc un prix de l'OPD suffisamment faible pour lequel il est rentable d'installer un OPD quand il y a des stocks mais de ne pas en installer quand il n'y a pas de stocks.

Notons que dans notre modèle, l'entreprise a un comportement de maximisation de l'espérance de son profit. Ainsi, implicitement, on a considéré une entreprise neutre au risque. Or, on a montré que dans le cas particulier montré juste au-dessus, quand il n'y a pas de stocks, l'installation d'un OPD non seulement augmente l'espérance de profit mais également réduit le risque. De la même façon, quand il y a des stocks, l'installation d'un OPD ne modifie ni l'espérance de profit ni le risque. Ainsi, ce dernier résultat, le plus important de cette étude, est robuste si on considère une entreprise averse au risque.

4 Conclusion

Grâce à un modèle heuristique, nous avons montré que la substituabilité intuitive entre les comportements de protection et de prévision pour une firme faisant face à une demande de caractéristique incertaine est très peu évidente. En effet, nous avons montré qu'il existe des cas où ces deux comportements sont complémentaires.

Dans cette conclusion, nous montrons quelques forces et limites de notre modèle. Nous avons considéré un modèle à trois périodes. C'est le nombre le plus faible de périodes qu'il faut considérer pour observer la complémentarité dont il est question dans cet article. En effet, si il n'y avait que deux périodes, alors une entreprise ayant un OPD ou des stocks satisferait toujours toute la demande. Il y aurait donc pour une firme potentiellement une incitation à se procurer une capacité de stockage étendue ou un OPD mais jamais les deux ensemble. Toute complémentarité ne pourrait donc pas être obtenue. La même remarque pourrait être faite si, dans le modèle tel qu'il est posé dans l'article, un outil de prévision de la demande permettait de prévoir les demandes des trois périodes.

Dans notre modèle, les caractéristiques de la demande future sont inconnues. Cependant, le volume total de la demande est constant (3 biens demandés dans notre modèle). Il est évident qu'avec l'hypothèse de coûts de production nuls que nous avons posée, une demande dont la quantité totale serait incertaine (en plus de la ventilation incertaine) ne changerait pas les résultats exposés dans cet article. Avec des coûts de production non nuls, la question nouvelle qui serait posée à la firme serait alors celle de la production de moins de trois unités. Nous ne pensons pas que l'ajout d'un paramètre sur la quantité de la demande aiderait à la compréhension des rapports entre stocks et OPD.

Enfin, nous avons considéré le problème dans un cadre discret, par exemple dans le cas où un OPD permet de connaître parfaitement la demande en seconde période. En réalité, il existe toute une palette d'OPD plus ou moins chers permettant de prévoir la demande plus ou moins sûrement. Bien évidemment, notre but dans cet article étant de montrer qu'il existe des cas où les OPD et les stocks sont des biens complémentaires et des cas où les OPD et les stocks sont des biens substituables, ces résultats ne seraient pas modifiés en considérant des variables continues.

A Résolution du problème

Dans tout les cas, la première unité du bien demandée est de caractéristique connue par l'entreprise. On peut supposer sans perte de généralité que cette première caractéristique demandée est $d_1 = A$.

A.1 Sans OPD

Sans OPD, l'entreprise peut alors anticiper que la seconde caractéristique sera A avec une probabilité α et B avec une probabilité $1 - \alpha$. Grâce à cela, l'entreprise peut également anticiper que la troisième caractéristique sera A avec une probabilité $\alpha^2 + (1-\alpha)^2$ et B avec une probabilité $2\alpha(1-\alpha)$. On peut donc calculer la probabilité ex-ante de chaque chemin de demande.

Demande	Probabilité
$(d_1, d_2, d_3) = (A, A, A)$	α^2
$(d_1, d_2, d_3) = (A, A, B)$	$\alpha(1-\alpha)$
$(d_1, d_2, d_3) = (A, B, A)$	$(1-\alpha)^2$
$(d_1, d_2, d_3) = (A, B, B)$	$\alpha(1-\alpha)$

Commençons par calculer le profit de la firme quand celle-ci ne possède pas d'OPD. Ce profit dépend de sa production. Le tableau suivant montre l'espérance de profit de la firme quand elle produit $(i, j)^o$ tel que $i+j \in \{3, 4\}$ et donc quand elle installe des stocks de taille étendue ou non.

Production	Espérance de profit
$(3,0)^o$	$3\alpha^2 + 2(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)$
$(2,1)^o$	$2\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha)$
$(1,2)^o$	$\alpha^2 + 2(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha)$
$(0,3)^o$	$(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha)$
$(4,0)^o$	$3\alpha^2 + 2(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha) - c$
$(3,1)^o$	$3\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha) - c$
$(2,2)^o$	$2\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha) - c$
$(1,3)^o$	$\alpha^2 + 2(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha) - c$
$(0,4)^o$	$(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha) - c$

On peut déjà voir que certaines productions ne seront jamais mises en œuvre quelles que soient les valeurs des paramètres. En effet, il ne peut pas être optimal d'acheter un stock étendu et de produire $(0,4)^o$ car il serait alors strictement plus profitable de produire $(1,2)^o$ sans stocks étendus. Pour les mêmes raisons, la production $(4,0)^o$ est strictement moins profitable que la production $(3,0)^o$. La production $(0,3)^o$ est strictement moins profitable que la production $(1,2)^o$. La production $(1,3)^o$ est strictement moins profitable que la production $(2,2)^o$.

On peut donc résumer les stratégies pertinentes dans le tableau suivant.

Production	Espérance de profit
$(3,0)^o$	$3\alpha^2 + 2(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)$
$(2,1)^o$	$2\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha)$
$(1,2)^o$	$\alpha^2 + 2(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha)$
$(3,1)^o$	$3\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha) - c$
$(2,2)^o$	$2\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha) - c$

Ainsi, quand l'entreprise décide de ne pas installer d'OPD et d'installer des stocks étendus, elle obtient un profit espéré

$$\max\{3\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha) - c, 2\alpha^2 + 3(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha) - c\} \quad (1)$$

Quand l'entreprise décide de ne pas installer d'OPD et de ne pas installer des stocks étendus, elle obtient un profit espéré

$$\max\{3\alpha^2+2(1-\alpha)+\alpha(1-\alpha), 2\alpha^2+3(1-\alpha)+2\alpha(1-\alpha), \alpha^2+2(1-\alpha)+3\alpha(1-\alpha)\} \quad (2)$$

A.2 Avec OPD

Avec OPD, l'entreprise peut prévoir la demande en seconde période, cependant, elle ne connaît pas cette demande au moment où elle décide de la taille de ses stocks mais seulement au moment où elle décide de sa production.

Supposons dans un premier temps que la demande prévue pour la seconde période est $d_2 = A$. Alors l'entreprise peut prévoir que la demande en troisième période sera $d_3 = A$ avec une probabilité α et $d_3 = B$ avec une probabilité $1 - \alpha$.

Les espérances de profit en fonction de la production sont alors données dans le tableau suivant.

Production	Espérance de profit
$(3,0)^o$	$3\alpha + 2(1-\alpha) - K$
$(2,1)^o$	$2\alpha + 3(1-\alpha) - K$
$(1,2)^o$	$\alpha + 2(1-\alpha) - K$
$(0,3)^o$	$(1-\alpha) - K$
$(4,0)^o$	$3\alpha + 2(1-\alpha) - K - c$
$(3,1)^o$	$3\alpha + 3(1-\alpha) - K - c$
$(2,2)^o$	$2\alpha + 3(1-\alpha) - K - c$
$(1,3)^o$	$\alpha + 2(1-\alpha) - K - c$
$(0,4)^o$	$(1-\alpha) - K - c$

Pour les mêmes raisons que celles données dans le cas avec OPD, on peut voir que les stratégies avec OPD, $(1,2)^o$, $(0,3)^o$, $(4,0)^o$, $(2,2)^o$, $(2,3)^o$, $(0,4)^o$ sont dominées par les autres stratégies de production avec OPD et ne peuvent donc pas être optimales. On peut réduire le tableau précédent au suivant.

Production	Espérance de profit
$(3,0)^o$	$3\alpha + 2(1-\alpha) - K$
$(2,1)^o$	$2\alpha + 3(1-\alpha) - K$
$(3,1)^o$	$3\alpha + 3(1-\alpha) - K - c$

Supposons dans un second temps que la demande prévue pour la seconde période est $d_2 = B$. Alors l'entreprise peut prévoir que la demande en troisième période sera $d_3 = A$ avec une probabilité $1 - \alpha$ et $d_3 = B$ avec une probabilité α.

Les espérances de profit en fonction de la production sont alors données dans le tableau suivant.

Production	Espérance de profit
$(3,0)^o$	$\alpha + 2(1-\alpha) - K$
$(2,1)^o$	$2\alpha + 3(1-\alpha) - K$
$(1,2)^o$	$3\alpha + 2(1-\alpha) - K$
$(0,3)^o$	$2\alpha + (1-\alpha) - K$
$(4,0)^o$	$\alpha + 2(1-\alpha) - K - c$
$(3,1)^o$	$2\alpha + 3(1-\alpha) - K - c$
$(2,2)^o$	$3\alpha + 3(1-\alpha) - K - c$
$(1,3)^o$	$3\alpha + 2(1-\alpha) - K - c$
$(0,4)^o$	$2\alpha + (1-\alpha) - K - c$

Pour les mêmes raisons que celles données dans le cas avec OPD, on peut voir que les stratégies avec OPD, $(3,0)^o$, $(0,3)^o$, $(4,0)^o$, $(3,1)^o$, $(1,3)^o$, $(0,4)^o$ sont dominées par les autres stratégies de production avec OPD et ne peuvent donc pas être optimales. On peut réduire le tableau précédent au suivant.

Production	Espérance de profit
$(2,1)^o$	$2\alpha + 3(1-\alpha) - K$
$(1,2)^o$	$3\alpha + 2(1-\alpha) - K$
$(2,2)^o$	$3\alpha + 3(1-\alpha) - K - c$

Ainsi, quand l'entreprise décide d'installer un OPD et des stocks étendus, elle obtient

$$3\alpha + 3(1-\alpha) - K - c. \tag{3}$$

Quand l'entreprise décide d'installer un OPD et pas de stocks étendus, elle obtient un profit

$$\max\{3\alpha + 2(1-\alpha) - K, 2\alpha + 3(1-\alpha) - K\}. \tag{4}$$

La firme maximise son profit ex-ante en comparant les équations 1, 2, 3 et 4.

Références

[Bowman, 1956] Bowman E. (1956) "Production Scheduling A Search Decision Rule for the Aggregate Scheduling Problem", *Operations Research*, 4(1) : 100-103.

[Bowman, 1963] Bowman E. (1963) "Consistency and Optimality in Managerial Decision Making", *Management Science*, 9(2) : 310-321.

[Chavas *et al.*, 2000] Chavas J-P., Despins P. et Fortenbery T. (2000) "Inventory Dynamics under Transaction Costs", *American Journal of Agricultural Economics*, 82(2) : 260-273.

[Christiano, 1988] Christiano L. (1988) "Why Does Inventory Investment Fluctuate So Much ?", *Journal of Monetary Economics*, 21 : 247-280.

[Dannerstedt, 1955] Dannerstedt G. (1955) "Production Scheduling for an Arbitrary Number of Periods Given the Sales Forecast in the Form of a Probability Distribution", *Journal of the Operations Research Society of America*, 3(3) : 300-318.

[Goodman, 1974] Goodman D. (1974) " Goal Programming Approach to Aggregate Planning of Production and Work Force" *Management Science*, 20(12) : 1569-1575.

[Hansmann et Hess, 1960] Hansmann F. et Hess S. (1960) "A linear Programming Approach to Production and Employment Scheduling" *Management Technology*, Monograph 1 : 46-51.

[Harris, 1913] Harris W. (1913) "How Many Parts To Make at Once", *Factory, The Magazine of Management*, 10 : 135-136.

[Holt *et al.*, 1955] Holt C., Modigliani F., et Simon H. (1955) "A linear Decision Rule for Production and Employment Scheduling" *Management Science*, 2(1) : 1-30.

[Jones, 1967] Jones C. (1967) "Parametric Production Planning", *Management Science*, 13(11) : 843-867.

[Kahn, 1992] Kahn J.A. (1992) "Why is Production More Volatile than Sales ? Theory and Evidence on the Stockout-Avoidance Motive for Inventory Holding", *Quaterly Journal of Economics*, 17 : 481-510.

[Krane, 1994] Krane S.D. (1994) "The Distinction Between Inventory Holding and Stockout Costs : Implications for Target Inventories, Asymmetric Adjustement, and The Effect of Aggregation on Production Smoothing", *International Economic Review*, 35 : 117-136.

[Peeters, 1998] Peeters M. (1998) "The Roles of Inventories Investigated in a Factor Demand Model", *Revue économiques*, 49(5) : 1345-1364.

[Ramey, 1991] Ramey V. (1991) "Nonconvex Costs and the Behaviour of Inventories", *Journal of Political Economy*, 99 : 306-334.

[Steele, 1952] Steele D. (1952) "Stocks and Stability", *Journal of Farm Economics*, 34(3) : 369-377.

[Taubert, 1968] Taubert W. (1968) "A Search Decision Rule for the Aggregate Scheduling Problem", *Management Science*, 14(6) : B343-B359.

[West, 1986] West K. (1986) "A Variance Bounds Test of the Linear Quadratic Inventory Model", *Journal of Political Economy*, 94 : 374-401.